

Приклади застосування критеріїв оцінювання завдань з розгорнутою відповіддю з математики до конкретних завдань

Критерії оцінювання відкритих завдань з розгорнутою відповіддю з математики розміщено на сайті Українського центру оцінювання якості освіти <http://testportal.gov.ua> у розділі «Підготовка до ЗНО – 2017».

Критерії оцінювання завдань з розгорнутою відповіддю з математики сертифікаційної роботи з математики зовнішнього незалежного оцінювання 2017 року

Кількість балів, що виставляються за виконання завдань **31** (з алгебри і початків аналізу), **32** (з геометрії) і **33** (з алгебри і початків аналізу), залежить від повноти розв'язання й правильності відповіді.

Загальні вимоги (рекомендації) до виконання завдань з розгорнутою відповіддю:

- розв'язання має бути математично грамотним і повним;
- методи розв'язання, форми його запису і форми запису відповіді можуть бути різними; якщо завдання можна розв'язати кількома способами, то достатньо навести розв'язання лише одним способом;
- за розв'язання завдання, у якому обґрунтовано отриману правильну відповідь, виставляється максимальна кількість балів;
- під час виконання завдання можна використовувати без доведення й посилення будь-які математичні факти та твердження, які містяться в підручниках і навчальних посібниках, що входять до переліку підручників, рекомендованих (допущених) Міністерством освіти і науки України.

Увага!

Завдання, на яке надано правильну відповідь, але **розв'язання не наведено**, оцінюється в **0 балів**.

Завдання, розв'язання якого **не відповідає умові**, оцінюється в **0 балів**.

У таблиці 1 наведено як оцінюється завдання з розгорнутою відповіддю з алгебри і початків аналізу.

Таблиця 1

Зміст оцінювання	Бали
Отримано правильну відповідь. Обґрунтовано всі ключові моменти розв'язування	4
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо / Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, що не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування / Отримана відповідь може бути неправильною	3
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо або не обґрунтовано. Можливі 1–2 помилки в обчисленнях або перетвореннях, що впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (розв'язана правильно лише частина завдання)	2
У правильній послідовності ходу розв'язування немає деяких етапів розв'язування. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або завдання розв'язане не повністю	1
Учасник не приступив до розв'язування завдання або приступив до його розв'язування, але його записи не відповідають зазначеним вище критеріям	0

**Приклад оцінювання завдання з алгебри і початків аналізу
(4 бали)**

Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 2|}{2}$.

Розв'язання

1. Область визначення функції: $x \geq 0$.

Розкриємо знак модуля за означенням.

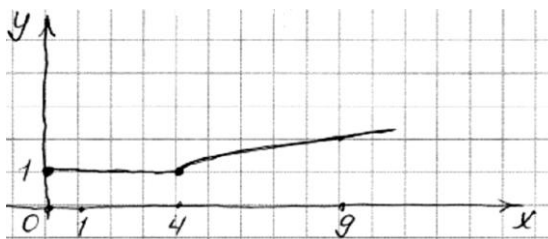
2. Якщо $|\sqrt{x} - 2| \geq 0$, то $\sqrt{x} \geq 2$. Тобто $x \geq 4$. Отже $y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} - 2}{2} = \sqrt{x} - 1$.

3. Якщо $|\sqrt{x} - 2| < 0$, то $\sqrt{x} < 2$. Тобто $0 \leq x < 4$. Отже $y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2}{2} = 1$

Одержуємо

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & \text{при } x \geq 4, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x < 4. \end{cases}$$

4. Будуємо графік функції:



Загальні критерії оцінювання завдань з розгорнутою відповіддю наведені на сайті УЦОЯО, для **запропонованого завдання** можуть бути конкретизовані наступним чином:

Оцінювання завдання

1. Правильно знайдена (і врахована при побудові графіка) область визначення заданої функції оцінюється **1 балом**.
2. Правильно знайдені значення аргументу, при яких підмодульна функція невід'ємна і правильно розкритий знак модуля в записі функції, в цьому випадку оцінюється **1 балом**.
3. Правильно знайдені значення аргументу, при яких підмодульна функція від'ємна (або недодатна) і правильно розкритий знак модуля в записі функції, в цьому випадку оцінюється **1 балом**.
4. Правильно побудований графік функції оцінюється **1 балом**.

За правильне розв'язання завдання учень одержує **4 бали**.

У таблиці 2 наведено як оцінюється завдання з розгорнутою відповіддю з геометрії.

Таблиця 2

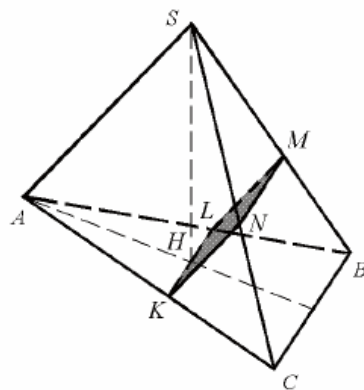
Зміст оцінювання	Бали
Отримано правильну відповідь. Обґрунтовано всі ключові моменти розв'язування та зазначено всі необхідні для доведення теореми, аксіоми тощо. Наведено рисунок, який відповідає розв'язанню завдання	4
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо / Рисунок немає / Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, що не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування / Отримана відповідь може бути неправильною	3
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо або не обґрунтовано. Рисунок немає / Можливі 1–2 помилки в обчисленнях або перетвореннях, що впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (розв'язана правильно лише частина завдання)	2
У правильній послідовності ходу розв'язування немає деяких етапів розв'язування. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або завдання розв'язане не повністю	1
Учасник не приступив до розв'язування завдання або приступив до його розв'язування, але його записи не відповідають зазначеним вище критеріям	0

**Приклад оцінювання завдання з геометрії
(4 бали)**

У правильній трикутній піраміді $SABC$ кут між бічним ребром і площиною основи дорівнює β , сторона основи дорівнює a , SH – висота піраміди.

1. Побудуйте на наведеному рисунку переріз піраміди площиною, що проходить через точку H паралельно ребрам SA і BC .
2. З'ясуйте, якою фігурою є переріз піраміди (відповідь обґрунтуйте).
3. Знайдіть площу перерізу піраміди.

Розв'язання



1. Побудований переріз дивись на рисунку.
2. Встановимо, яка фігура утворена у результаті перерізу піраміди площиною, що проходить через точку H паралельно ребрам SA і BC .
З перпендикулярності прямих BC і AH випливає за теоремою про три перпендикуляри, що $AS \perp BC$. Тому переріз $KLMN$ ($K \in AC$, $L \in AB$, $M \in SB$, $N \in SC$, $H \in KL$) у якого $KL \parallel BC$, $MN \parallel BC$ та $LM \parallel AS$ і $NK \parallel AS$ є прямокутником.
3. Знайдемо площу перерізу піраміди площиною.

Оскільки трикутники AKL і ACB , а також трикутники CKN і CAS є подібними, то $KL = \frac{2}{3}BC = \frac{2a}{3}$, $KN = \frac{1}{3} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{AH}{\cos \beta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3 \cos \beta}$,

$$S_{KLMN} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{9 \cos \beta} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{27 \cos \beta}.$$

- Відповідь:*
1. Побудований переріз дивись на рисунку.
 2. Фігура, яка утворена у результаті перерізу піраміди площиною, що проходить через точку H паралельно ребрам SA і BC , є прямокутником.
 3. Площа перерізу дорівнює $\frac{2\sqrt{3}a^2}{27 \cos \beta}$.

Оцінювання завдання

1 бал

- 1. Якщо учень правильно побудував переріз піраміди, то він одержує **1 бал.**

1 бал

- 2. Якщо учень правильно встановив, яка фігура утворена у результаті перерізу і ця відповідь обґрунтована, то він одержує **1 бал.**

2 бали

- 3. Якщо учень правильно знайшов площу перерізу, то він одержує **2 бали.** Якщо учень допустив описку, або незначну помилку при обчисленнях, то він одержує тільки **1 бал.**

За правильне розв'язання завдання учень одержує **4 бали.**

У таблиці 3 наведено як оцінюється завдання з розгорнутою відповіддю з алгебри і початків аналізу.

Таблиця 3

Зміст оцінювання	Бали
Отримано правильну відповідь. Обґрунтовано всі ключові моменти розв'язування	6
Отримано правильну відповідь. Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо. /Можливі описки в обчисленнях або перетвореннях, що не впливають на правильність відповіді / Отримана відповідь може бути неправильною	5
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування можуть бути обґрунтовані недостатньо. /Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, що не впливають на правильність подальшого ходу розв'язування / Отримана відповідь може бути неправильною	4
Наведено логічно правильну послідовність кроків розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо. Можливі 1–2 помилки або описки в обчисленнях або перетвореннях, що незначно впливають на правильність подальшого ходу розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (розв'язана правильно лише частина завдання)	3
У правильній послідовності ходу розв'язування немає деяких етапів. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Можливі помилки в обчисленнях або перетвореннях, що впливають на подальший хід розв'язування. Отримана відповідь може бути неповною або неправильною	2
У послідовності ходу розв'язування є лише деякі етапи розв'язування. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або завдання розв'язане не повністю	1
Учасник не приступив до розв'язування завдання або приступив до його розв'язування, але його записи не відповідають зазначеним вище критеріям	0

**Приклад оцінювання завдання з алгебри і початків аналізу
(6 балів)**

Знайдіть всі значення параметра a , при яких всі розв'язки нерівності $ax^2 - x + 1 - a < 0$ задовольняють нерівність $0 < x < 1$.

Розв'язання

1. Якщо $a = 0$, то одержуємо нерівність $x > 1$, яка не задовольняє умову задачі.
2. Якщо $a \neq 0$, то розгляньмо функцію $y = ax^2 - x + 1 - a$.
 $ax^2 - x + 1 - a = 0$. Оскільки $D = 1 - 4a(1 - a) = (1 - 2a)^2 \geq 0$ при будь яких значеннях a , то $x_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 2a)}{2a}$. Тоді $x_1 = \frac{1}{a} - 1$, $x_2 = 1$.

а) якщо $D = 0$, то $a = \frac{1}{2}$ і нерівність має вигляд $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} < 0$, тобто $\frac{1}{2}(x - 1)^2 < 0$, розв'язком якої є порожня множина. Але в цьому випадку всі розв'язки заданої в умові нерівності задовольняють нерівність $0 < x < 1$.
Отже, $a = \frac{1}{2}$ задовольняє умову задачі.

б) при $a < 0$, розв'язок заданої нерівності: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a} - 1\right) \cup (1; +\infty)$, що не задовольняє нерівність $0 < x < 1$.

в) при $a > 0$, умова задачі виконується тільки тоді, коли корінь $x_1 = \frac{1}{a} - 1$ буде належати проміжку $[0; 1)$. Маємо $0 \leq \frac{1}{a} - 1 < 1$, тобто $\frac{1}{2} < a \leq 1$.

Враховуючи ще й випадок $a = \frac{1}{2}$, одержуємо, що умова задачі виконується при $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Зауваження. Розв'язуючи завдання, учень може використати умови розташування коренів квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$ відносно чисел A і B .

Відповідь: $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

1 бал

1 бал

4 бали

Оцінювання завдання

1. Якщо учень правильно обґрунтував, що при $a = 0$ та при $a < 0$ умова задачі не виконується, то він одержує **1 бал**.
2. Якщо після обґрунтування того, що $a > 0$, учень будь яким способом довів, що умова задачі виконується при $\frac{1}{2} < a \leq 1$, то він одержує ще **4 бали**. Якщо учень допустив описку чи помилку в обчисленнях або перетвореннях у правильному ході міркувань, то він одержує **2 бали** (із цих **4 балів**).
3. Якщо учень дослідив окремо випадок $a = \frac{1}{2}$ і зробив висновок, що і в цьому випадку умова задачі виконується, то він одержує ще **1 бал**.

За правильне розв'язання завдання учень одержує **6 балів**.